

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. Алексеева» (НГТУ)

Дзержинский политехнический институт (филиал)

УТВЕРЖДАЮ:
Директор института
_____ А.М. Петровский
“10” _____ июня _____ 2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.Б.25 Уравнения математической физики

(индекс и наименование дисциплины по учебному плану)

для подготовки бакалавров

Направление подготовки: 01.03.04 Прикладная математика

Направленность: Математические и компьютерные методы для современных технологий

Форма обучения: очная

Год начала подготовки 2024

Выпускающая кафедра Автоматизация, энергетика, математика и информационные системы

Кафедра-разработчик Автоматизация, энергетика, математика и информационные системы

Объем дисциплины 144/4
часов/з.е

Промежуточная аттестация экзамен

Разработчик: к.ф.-м.н., доцент Лобаев А.Н.

Дзержинск 2024

Рабочая программа дисциплины: разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО 3++) по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика, утвержденного приказом МИНОБРНАУКИ РФ от 10 января 2018 года № 11 на основании учебного плана, принятого УС ДПИ НГТУ

протокол от 05.06.2024 № 10

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры-разработчика РПД Автоматизация, энергетика, математика и информационные системы
протокол от 10.06.2024 № 7

Зав. кафедрой к.т.н, доцент _____ Л.Ю. Вадова
(подпись)

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий выпускающей кафедрой Автоматизация, энергетика, математика и информационные системы
к.т.н, доцент _____ Л.Ю.Вадова
(подпись)

Начальник ОУМБО _____ И.В. Старикова
(подпись)

Рабочая программа зарегистрирована в ОУМБО: 01.03.04 - 25

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цели и задачи освоения дисциплины	4
2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.....	4
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)	4
4. Структура и содержание дисциплины.....	6
5. Текущий контроль успеваемости и промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины.....	11
6. Учебно-методическое обеспечение дисциплины.....	14
7. Информационное обеспечение дисциплины.....	15
8. Образовательные ресурсы для инвалидов и лиц с ОВЗ.....	16
9. Материально-техническое обеспечение, необходимое для осуществления образовательного процесса по дисциплине.....	17
10. Методические рекомендации обучающимся по освоению дисциплины.....	18
11. Оценочные средства для контроля освоения дисциплины.....	20

1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Цель освоения дисциплины:

Целью освоения дисциплины «Уравнения математической физики» является углубленное изучение основных уравнений математической физики и различных способов их решения, применение методов математического анализа функций одной и нескольких вещественных переменных к решению уравнений в частных производных, а также применение полученных знаний к анализу различных физических моделей.

1.2. Задачи освоения дисциплины (модуля):

- знание основных уравнений математической физики и их классификацию; постановку краевых и начальных задач для дифференциальных уравнений второго порядка и методы их решения;
- умение решать ДУ с частными производными первого порядка; умение решать ДУ с постоянными коэффициентами в частных производных второго порядка;
- применение классических методов решения уравнений математической физики (характеристик, разделения переменных, преобразования Фурье, функций Грина) для реальных систем; навыков работы со специальными функциями.

2 МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Учебная дисциплина Уравнения математической физики включена в перечень дисциплин обязательной части образовательной программы вне зависимости от ее направленности (профиля). Дисциплина реализуется в соответствии с требованиями ФГОС, ОП ВО и УП, по данному направлению подготовки.

Дисциплина базируется на следующих дисциплинах: Математический анализ, Дифференциальные уравнения, Физика, Классическая механика.

Дисциплина Уравнения математической физики является основополагающей для изучения следующих дисциплин: Теория управления, Математическое моделирование.

Рабочая программа дисциплины Уравнения математической физики для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья разрабатывается индивидуально с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья таких обучающихся, по их личному заявлению.

3 КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Таблица 1 – Формирование компетенции ОПК-1 дисциплинами

Наименование дисциплин, формирующих компетенцию совместно	Семестры формирования компетенций дисциплинами							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Код компетенции ОПК-1								
Линейная алгебра и аналитическая геометрия								
Математический анализ								
Физика								
Дифференциальные уравнения								
Операционное исчисление								
Теория функций комплексного переменного								
Классическая механика								
Уравнения математической физики								
Теория управления								
Выполнение и защита выпускной квалификационной работы								

ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОП

Таблица 2

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине			Оценочные средства	
					Текущего контроля	Промежуточной аттестации
ОПК-1. Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике	ИОПК-1.2. Применяет методы математического анализа теории дифференциальных уравнений и операционного исчисления при решении задач инженерной практики	Знать: основные уравнения математической физики и их классификацию; постановку краевых и начальных задач для дифференциальных уравнений второго порядка и методы их решения.	Уметь: решать ДУ с частными производными первого порядка; уметь решать ДУ с постоянными коэффициентами в частных производных второго порядка.	Владеть: классическими методами решения уравнений математической физики (характеристик, разделения переменных, преобразования Фурье, функций Грина) для реальных систем; навыками работы со специальными функциями.	Контрольные работы в течение семестра. Расчетно-графическая работа в каждом семестре	Вопросы для устного собеседования: билеты (20 билетов)

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ по семестрам

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 4 зач.ед./144 часа, распределение часов по видам работ семестрам представлено в табл. 3.

Формат изучения дисциплины: с использованием элементов электронного обучения

Таблица 3 – Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ по семестрам

Для очной формы обучения

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр
		7
1. Контактная работа обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) (всего), в том числе:	57	57
1.1. Аудиторные занятия (всего), в том числе:	51	51
- лекции (Л)	17	17
- лабораторные работы (ЛР)	17	17
- практические занятия (ПЗ)	17	17
- практикумы (П)		
1.2. Внеаудиторные занятия (всего), в том числе:	6	6
- групповые консультации по дисциплине	4	4
- групповые консультации по промежуточной аттестации (экзамен)	2	2
2. Самостоятельная работа студента (СРС) (всего)	51	51
Вид промежуточной аттестации экзамен	36	36
Общая трудоемкость, часы/зачетные единицы	144/4	144/4

1.2 Содержание дисциплины, структурированное по темам

Содержание дисциплины, структурированное по темам, приведено в таблице 4.

В столбце «Вид СР» введены следующие сокращения:

«Лекции» – предполагает изучение материалов учебников и учебных пособий для подготовки к лекциям и повторение материала после прослушивания лекции для участия в обсуждениях на практических занятиях.

«Практика» - предполагает использование методических разработок для помощи при решении индивидуальных задач и решение задач из задачников.

4.2 Содержание дисциплины, структурированное по темам

Таблица 4 – Содержание дисциплины, структурированное по темам для обучающихся очной формы обучения

Планируемые (контролируемые) результаты освоения: код УК; ОПК; ПК и индикаторы достижения компетенций	Наименование тем	Виды учебной работы				Вид СРС	Наименование используемых активных и интерактивных образовательных технологий	Реализация в рамках практической подготовки (трудоемкость в часах)	Наименование разработанного электронного курса (трудоемкость в часах)
		Контактная работа			Самостоятельная работа обучающихся (СРС) час				
		Лекции, час	Лабораторные работы, час	Практические занятия, час					
7 семестр									
ОПК-1, ИОПК-1.2.	Раздел 1 Линейные уравнения в частных производных первого и второго порядков. Классификация и постановка основных задач.								
	Тема 1.1 Линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения первого порядка: характеристики и первые интегралы, задача Коши.	1		1	2	Лекции: 6.6.4 (стр. 6-10) Практика: 6.1.2 (стр.21-40)	Разбор решения конкретных примеров с помощью презентации и у доски		
	Тема 1.2 Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка.	2	2	2	4	Лекции: 6.6.4 (стр. 6-10) Практика: 6.1.2 (стр.21-40)			
	Тема 1.3 Задача Коши для гиперболических и параболических уравнений. Краевые задачи для эллиптических уравнений.	1	1		2	Лекции: 6.6.4 (стр. 19-39) Практика: 6.1.2 (стр.81-84)			
	Тема 1.4 Смешанные задачи для гиперболических и параболических уравнений.	1	1	1		Лекции: 6.6.4 (стр. 12-39) Практика: 6.1.2 (стр.50-52)			
	Тема 1.5 Краевые задачи для	1		1	2	Лекции: 6.1.4 (стр. 12-39)			

Планируемые (контролируем ые) результаты освоения: код УК; ОПК; ПК и индикаторы достижения компетенций	Наименование тем	Виды учебной работы				Вид СРС	Наименова- ние исполь- зуемых ак- тивных и интерактив- ных образова- тельных технологий	Реализация в рамках практичес- кой подготовки (трудоем- кость в часах)	Наименов ание разработа нного электронн ого курса (трудоемк ость в часах)
		Контактная работа			Самостоятельная работа обучающихся (СРС) час				
		Лекции, час	Лабораторные работы, час	Практические занятия, час					
	эллиптических уравнений					Практика 6.1.2 (стр.50-52)			
	Итого по разделу 1	6	4	5	10				
	Раздел 2 Гиперболические уравнения.								
	Тема 2.1 Задача Коши для волнового уравнения. Распространение волн в пространстве. Формулы Даламбера и Кирхгофа. Метод спуска. Формула Пуассона.	1	2	2	4	Лекции: 6.1.4 (стр. 403-414) Практика: 6.1.2 (стр.91-100)	Разбор решения конкретных примеров у доски		
	Тема 2.2 Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения. Принцип Дюамеля. Смешанная задача для волнового уравнения.	1	1	1	4	Лекции: 6.1.4 (стр. 403-414) Практика: 6.1.2 (стр.91-100)			
	Итого по разделу 2	2	3	3	8				

	Раздел 3 Специальные функции математической физики							
	Тема 3.1 Метод Фурье. Многомерная задача Штурма-Лиувилля. Разделение переменных для волнового уравнения в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат.	1	2		5	Лекции: 6.1.2 (стр. 55-61) Практика: 6.1.2 (стр.21-40)	Разбор решения конкретных примеров у доски	
	Тема 3.2 Функции Бесселя, полиномы Лежандра, присоединенные функции Лежандра.	1	1	2	6	Лекции: 6.1.4 (стр. 63-149) Практика: 6.1.2 (стр.106-114)		
	Итого по разделу 3	2	3	2	11			
	Раздел 4 Параболические уравнения							
	Тема 4.1 Задача Коши для уравнения теплопроводности.	1	1		3	Лекции: 6.1.4 (стр. 63-149) Практика: 6.1.2 (стр.106-114)	Разбор решения конкретных примеров у доски	
ОПК-1, ИОПК-1.2.	Тема 4.2. Функция источника, или фундаментальное решение уравнения теплопроводности.	1	2	1	4	Лекции: 6.1.4 (стр. 155-171) Практика: 6.6.4 (стр.106-117)		
	Тема 4.3 Применение интегральных преобразований для построения фундаментального решения уравнения теплопроводности.	1		2	3	Лекции: 6.1.4 (стр. 155-171) Практика: 6.1.2 (стр.106-114)		
	Тема 4.4 Смешанная задача для уравнения теплопроводности. Функция Грина. Задача без начальных данных.	1	1	1	2	Лекции: 6.1.4 (стр.155-171) Практика: 6.1.4 (стр.155-171)	Разбор решения конкретных примеров у доски	
	Итого по разделу 4	4	4	4	12			
	Раздел 5 Эллиптические уравнения							
	Тема 5.1 Фундаментальное решение оператора Лапласа. Представление функции в виде суммы потенциалов.	1	1	1	3	Лекции: 6.1.2 (стр. 140-154) Практика: 6.1.2 (стр.140-154)	Разбор решения конкретных	

	Тема 5.2 Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Функции Грина	1		1	4	Лекции: 6.1.2 (стр. 140-154) Практика: 6.1.2 (стр.140-154)	примеров у доски		
ОПК-1, ИОПК-1.2.	Тема 5.3 Формулы Пуассона для шара и полупространства. Применение потенциалов к решению краевых задач. Ньютонов потенциал, потенциалы простого и двойного слоя, их основные свойства.	1	2	1	3	Лекции: 6.6.2 (стр. 140-154) Практика: 6.1.2 (стр.140-154)			
	Итого по разделу 5	3	3	3	10				
	ИТОГО ПО ДИСЦИПЛИНЕ	17	17	17	51				

5 ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ.

5.1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности

Примерная тематика лабораторных работ

1. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка.
2. Решение задачи смешанной задачи для волнового уравнения (на примере уравнения колебаний струны).
3. Решение одномерного уравнения теплопроводности⁷
4. Решение уравнения Лапласа.

Задания к лабораторным работам

Примеры заданий к лабораторным работам представлены в пункте 11.2.2

Примерная тематика контрольных работ:

1. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка.
2. Решение методом Фурье уравнений гиперболического и параболического типа

Примеры заданий к контрольным работам

1. Определить тип уравнения второго порядка и привести его к каноническому виду

$$8 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0$$

2. Привести к каноническому виду и решить уравнение

$$3x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 5xy \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + 2y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 3x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

3. Решить задачу методом Фурье

Найти решение волнового уравнения, удовлетворяющее граничным и начальным

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 4, t > 0,$$

$$u(0, t) = u(4, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{3x}{2}, & 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{3(4-x)}{2}, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

Решить методом Фурье Задачу Коши для уравнения теплопроводности (вычислить коэффициенты и записать решение в виде однократного интеграла)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 3, t > 0,$$

$$u(0, t) = u(3, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 3-x, & \frac{3}{2} \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Перечень вопросов, выносимых на промежуточную аттестацию

Полный перечень вопросов для подготовки к экзамену

1. Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка. Характеристики. Задача Коши.
2. Уравнения второго порядка. Классификация.
3. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Общее решение.
4. Задачи Коши и Гурса для гиперболических уравнений.
5. Формула Даламбера и метод бегущих волн.
6. Сферически-симметричные решения трехмерного волнового уравнения. Плоские волны.
7. Задача Коши для двумерного и трехмерного волнового уравнения.
8. Метод Фурье решения задач Дирихле и Неймана на плоскости.
9. Метод Фурье решения смешанных задач для волнового уравнения.
10. Вынужденные колебания и неоднородные граничные условия
11. Метод Фурье решения смешанных задач для уравнения теплопроводности.
12. Сферические гармоники и собственные функции уравнения Гельмгольца.
13. Колебания шара и цилиндра.
14. Построение функции Грина для задач Дирихле и Неймана на плоскости.
15. Формулы Пуассона для круга и полуплоскости.
16. Построение функции Грина для задач Дирихле и Неймана в пространстве.
17. Формулы Пуассона для шара и полупространства.
18. Построение функции Грина для оператора Гельмгольца.
19. Ньютонов потенциал, его вычисление и свойства.
20. Вычисление потенциалов простого и двойного слоя.
24. Применение потенциалов к решению краевых задач.
25. Применение преобразования Фурье к вычислению фундаментального решения уравнения теплопроводности.
26. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формулы Пуассона.
27. Применение преобразования Лапласа к решению задач математической физики.
29. Применение преобразования Фурье к решению задач математической физики.

5.2. Описание показателей и критериев контроля успеваемости, описание шкал оценивания

Для оценки знаний, умений, навыков и формирования компетенции по дисциплине применяется балльно-рейтинговая система контроля и оценки успеваемости обучающихся очной формы. Основные требования балльно-рейтинговой системы по дисциплине и шкала оценивания приведены в таблицах 5 - 7.

Таблица 5 – Требования балльно-рейтинговой системы по дисциплине

Виды работ	Количество во подвидов работы	Максимальные баллы за подвид работы		Сроки выполнения подвидов работы	Дополнительные баллы	Штрафные баллы
		1	2			
Контрольные работы	2	10	10	Март, апрель	До +4 за 1 в срок сданную работу	До -4 за 1 работу
Лабораторные работы	6	5 баллов		В течении семестра	До +4	До -4
Выполнение домашних заданий	5	По 4 балла за 1 работу		В течении семестра	До +1 балла за 1 работу	До -1 балла за 1 работу
Посещение занятий (участие в обсуждениях задач)	16	До 0.25 балла за 1 неделю		еженедельно	Ответ у доски до +1 балла	По -1 баллу за 1 пропуск
Ответ на экзамене	1	26		сессия		

Таблица 6 – Критерии оценивания результата обучения по дисциплине и шкала оценивания

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Критерии оценивания результатов обучения			
		Оценка «неудовлетворительно» / «не зачтено» 0-54% от тах рейтинговой оценки контроля	Оценка «удовлетворительно» / «зачтено» 55-70% от тах рейтинговой оценки контроля	Оценка «хорошо» / «зачтено» 71-85% от тах рейтинговой оценки контроля	Оценка «отлично» / «зачтено» 86-100% от тах рейтинговой оценки контроля
ОПК-1. Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике	ИОПК-1.2. Использует методы математического моделирования при решении профессиональных задач и в инженерной практике	Изложение учебного материала бессистемное, неполное, не знает основные типы дифференциальных уравнений в частных производных и их классификацию. Не знает основ метода разделения переменных и его приложений к решению задач математической физики, что препятствует усвоению последующего материала	Фрагментарные, поверхностные знания основных разделов математической физики. Изложение полученных знаний неполное, однако это не препятствует усвоению последующего материала. Допускаются отдельные существенные ошибки, исправленные с помощью преподавателя. Затруднения при формулировании основных положений и их применении	Знает материал на достаточно хорошем уровне; представляет основные задачи в рамках постановки целей и выбора оптимальных способов их достижения.	Имеет глубокие знания всего материала, понимает структуру дисциплины; освоил новации лекционного курса по сравнению с учебной литературой; изложение полученных знаний полное, системное; допускаются единичные ошибки, самостоятельно исправляемые при собеседовании

Таблица 7 – Критерии оценивания

Оценка	Критерии оценивания
Высокий уровень «5» (отлично)	оценку «отлично» заслуживает обучающийся, освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал без пробелов; выполнивший все задания, предусмотренные учебным планом на высоком качественном уровне; практические навыки профессионального применения освоенных знаний сформированы.
Средний уровень «4» (хорошо)	оценку «хорошо» заслуживает обучающийся, практически полностью освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не оценены максимальным числом баллов, в основном сформировал практические навыки.
Пороговый уровень «3» (удовлетворительно)	оценку «удовлетворительно» заслуживает обучающийся, частично с пробелами освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, многие учебные задания либо не выполнил, либо они оценены числом баллов близким к минимальному, некоторые практические навыки не сформированы.
Минимальный уровень «2» (неудовлетворительно)	оценку «неудовлетворительно» заслуживает обучающийся, не освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не выполнил, практические навыки не сформированы.

6 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Учебная литература

6.1.1 **Тихонов А.Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики: Учебник.- 7-е изд. Изд-во «Наука», 1977, - 736 с.

6.1.2 **Емельянов, В.М.** Уравнения математической физики : практикум по решению задач: *учебное пособие для вузов / В. М. Емельянов, Е. А. Рыбакина. - СПб. : Ланьэ, 2008. - 224с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература).

6.1.3 **Владимиров, В.С.** Уравнения математической физики : *учебное пособие для вузов / В. С. Владимиров. - М. : Наука, 1981. - 512с.

6.1.4 **Лаптев, Г.И.** Уравнения математической физики [Электронные текстовые данные] : #учебное пособие / Г. И. Лаптев, Г. Г. Лаптев. - М. : [Б.и.], 2003. - 328 с.

6.1.5 **Голоскоков, Д.П.** Уравнения математической физики : решение задач в системе Maple: учебник для вузов / Д.П. Голоскоков. - СПб.: Питер, 2004. - 539с. - (Учебник для вузов).

Библиотечный фонд укомплектован печатными изданиями из расчета не менее 0,25 экземпляра каждого из изданий, указанных выше на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих соответствующую дисциплину (модуль).

6.2. Методические указания, рекомендации и другие материалы к занятиям

6.2.3 **Преобразование Лапласа и его применение [Электронные текстовые данные]:** метод. указания для обучающихся направлений подготовки 01.03.04, 09.03.02, 13.03.02, 15.03.02, 15.03.04, 18.03.01, 19.03.02, 23.03.03 всех форм обучения. В 2ч. Ч.1. / ДПИ НГТУ; сост.: А.Н. Лобаев, Н.М. Богословская. – Дзержинск, 2018. – 20 с.

6.2.4 **Преобразование Лапласа и его применение [Электронные текстовые данные]:** метод. указания для обучающихся направлений подготовки 01.03.04, 09.03.02, 13.03.02, 15.03.02, 15.03.04, 18.03.01, 19.03.02, 23.03.03 всех форм обучения. В 2ч. Ч.2. / ДПИ НГТУ; сост.: А.Н. Лобаев, Н.М. Богословская.– Дзержинск, 2018. – 22 с.

6.2.5 **РЯДЫ ФУРЬЕ [Электронные текстовые данные]:** метод. указания для обучающихся направлений подготовки 01.03.04, 09.03.02, 13.03.02, 15.03.02, 15.03.04, 18.03.01, 19.03.02, 23.03.03 очной формы обучения / ДПИ НГТУ; сост.: Н.М. Богословская. – Дзержинск, 2018. – 22 с.

6.2.6 **Ряды:** учебное пособие для вузов / Н.М. Богословская, А.Н. Лобаев, И.Ю. Харитоновна, С.И. Вдовин; Нижегород. Гос. ун-т им. Р. Е. Алексеева. - Н.Новгород, 2020.-105 с.

6.2.7 **Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка [Текст и электронные текстовые данные] :** #метод. указ. к практическим занятиям по дисц. "Уравнения математической физики", "Теория управления", "Моделирование систем и процессов", "Математическое моделирование" для обучающихся направления подготовки бакалавров 01.03.04 очной формы обучения и по дисц. "Математика" для обучающихся направлений подготовки бакалавров 09.03.02, 15.03.04 всех форм обучения / Сост. А.Н. Лобаев, Н.М. Богословская. - Н.Новгород, 2021.

6.2.8 **Элементы теории поля[Текст и электронные текстовые данные] :** метод. указания по дисциплине «Математика» для обучающихся направлений подготовки 01.03.04, 09.03.02, 13.03.02, 15.03.02, 15.03.04, 18.03.01, 19.03.02, 23.03.03 всех форм обучения / ДПИ НГТУ; сост.: Н.М. Богословская, А.Н. Лобаев, И.Ю. Харитоновна.– Дзержинск, 2018. – 35 с.

6.2.9 **Методические рекомендации для ППС по организации самостоятельной работы студентов по дисциплине «Уравнения математической физики» для студентов направления 231300 «Прикладная математика» профиля «Математическое моделирование в экономике и технике»; направления 100100 «Сервис» профиля «Информационный сервис» очной формы обучения / Сост. А.Н. Лобаев. – Н.Новгород, 2013. – 12 с.**

7 ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебный процесс по дисциплине обеспечен необходимым комплектом лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства (состав по дисциплине определен в настоящей РПД и подлежит обновлению при необходимости).

7.1. Перечень информационных справочных систем

Дисциплина, относится к группе дисциплин, в рамках которых предполагается использование информационных технологий как вспомогательного инструмента.

Информационные технологии применяются в следующих направлениях: при подготовке и оформлении отчетов о лабораторных работах, выполнении заданий для самостоятельной работы.

Таблица 8 – Перечень электронных библиотечных систем

№	Наименование ЭБС	Ссылка к ЭБС
1	Консультант студента	http://www.studentlibrary.ru/
2	Лань	https://e.lanbook.com/

7.2. Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства, необходимого для освоения дисциплины

Таблица 9 – Программное обеспечение

№ п/п	Программное обеспечение, используемое в университете на договорной основе	Программное обеспечение свободного распространения
1	Microsoft Windows 10 (подписка MSDN 700593597, подписка DreamSpark Premium, 19.06.19)	Adobe Acrobat Reader https://acrobat.adobe.com/ru/ru/acrobat/pdf-reader.html
2	Microsoft office 2010 (Лицензия № 49487295)	OpenOffice https://www.openoffice.org/ru/

№ п/п	Программное обеспечение, используемое в университете на договорной основе	Программное обеспечение свободного распространения
	от 19.12.2011)	
3	Консультант Плюс	PTC Mathcad Express https://www.mathcad.com/ru

Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем

В таблице 10 указан перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем, к которым обеспечен доступ (удаленный доступ).

Таблица 10 – Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем

№ п/п	Наименование профессиональной базы данных, информационно-справочной системы	Доступ к ресурсу (удаленный доступ с указанием ссылки/доступ из локальной сети университета)
1	2	3
1	База данных стандартов и регламентов РОССТАНДАРТ	https://www.gost.ru/portal/gost//home/standarts
2	Перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем	https://cyberpedia.su/21x47c0.html
3	Инструменты и веб-ресурсы для веб-разработки – 100+	https://techblog.sdstudio.top/blog/instrumenty-i-veb-resursy-dlia-veb-razrabotki-100-plus
4	Справочная правовая система «КонсультантПлюс»	доступ из локальной сети

8 ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОВЗ

В таблице 11 указан перечень образовательных ресурсов, имеющих формы, адаптированные к ограничениям их здоровья, а также сведения о наличии специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования.

Таблица 11 – Образовательные ресурсы для инвалидов и лиц с ОВЗ

№	Перечень образовательных ресурсов, приспособленных для использования инвалидами и лицами с ОВЗ	Сведения о наличии специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования
1	ЭБС «Консультант студента»	озвучка книг и увеличение шрифта
2	ЭБС «Лань»	специальное мобильное приложение - синтезатор речи, который воспроизводит тексты книг и меню навигации
3	ЭБС «Юрайт»	версия для слабовидящих

Согласно Федеральному Закону об образовании 273-ФЗ от 29.12.2012 г. ст. 79, п.8 "Профессиональное обучение и профессиональное образование обучающихся с ограниченными возможностями здоровья осуществляются на основе образовательных программ, адаптированных при необходимости для обучения указанных обучающихся". АОП разрабатывается по каждой направленности при наличии заявлений от обучающихся, являющихся инвалидами или лицами с ОВЗ и изъявивших желание об обучении по данному типу образовательных программ.

9 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ, НЕОБХОДИМОЕ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Учебные аудитории для проведения занятий по дисциплине, оснащены оборудованием и техническими средствами обучения.

В таблице 12 перечислены:

- учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения;
- помещения для самостоятельной работы обучающихся, которые оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ДПИ НГТУ.

Таблица 12 – Оснащенность аудиторий и помещений для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

№	Наименование аудиторий и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность аудиторий помещений и помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
1	1433А Аудитория для лекционных и практических занятий Нижегородская обл., г. Дзержинск, ул. Гайдара, д. 49	Комплект демонстрационного оборудования: ПК, с выходом на мультимедийный проектор, на базе Intel Pentium G4560 3.5 ГГц, 4 Гб ОЗУ, монитор 20' – 1 шт. Мультимедийный проектор Epson- 1 шт; Экран – 1 шт.	<ul style="list-style-type: none"> • MicrosoftWindows 10 Домашняя (поставка с ПК) • LibreOffice 6.1.2.1. (свободное ПО) • Foxit Reader (свободное ПО); • 7-zip для Windows (свободное ПО)
2	1234 Научно-техническая библиотека ДПИ НГТУ, студенческий читальный зал; Нижегородская обл., г. Дзержинск, ул. Гайдара, д. 49	Комплект демонстрационного оборудования: ПК, с выходом на мультимедийный проектор, на базе Intel Pentium G4560 3.5 ГГц, 4 Гб ОЗУ, монитор 20' – 1 шт. Мультимедийный проектор Epson- 1 шт; Экран – 1 шт.; Набор учебно-наглядных пособий	<ul style="list-style-type: none"> • MicrosoftWindows 10 Домашняя (поставка с ПК) • LibreOffice 6.1.2.1. (свободное ПО) • Foxit Reader (свободное ПО); • 7-zip для Windows (свободное ПО)
3	1443а компьютерный класс - помещение для СРС, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), Нижегородская обл., г. Дзержинск, ул. Гайдара, д. 49	<ul style="list-style-type: none"> • ПК на базе IntelCeleron 2.67 ГГц, 2 Гб ОЗУ, монитор Acer 17' – 4 шт. ПК подключены к сети «Интернет» и обеспечивают доступ в электронную информационно-образовательную среду университета 	<ul style="list-style-type: none"> • Microsoft Windows 7 (подписка DreamSpark Premium) • Apache OpenOffice 4.1.8 (свободное ПО); • Mozilla Firefox (свободное ПО); • Adobe Acrobat Reader (свободное ПО); • 7-zip для Windows (свободное ПО); • КонсультантПлюс (ГПД № 0332100025418000079 от 21.12.2018);

10 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ОБУЧАЮЩИМСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

10.1. Общие методические рекомендации для обучающихся по освоению дисциплины, образовательные технологии

Дисциплина реализуется посредством проведения контактной работы с обучающимися (включая проведение текущего контроля успеваемости), самостоятельной работы обучающихся и промежуточной аттестации.

Контактная работа: аудиторная, внеаудиторная, а также может проводиться в электронной информационно-образовательной среде университета (далее - ЭИОС).

Преподавание дисциплины ведется с применением следующих видов образовательных технологий:

- знакомство с материалами лекций в среде MOODLE;
- проведение консультаций в конференциях Zoom;
- балльно-рейтинговая технология оценивания;

При преподавании дисциплины «Уравнения математической физики», используются современные образовательные технологии, позволяющие повысить активность обучающихся при освоении материала курса и предоставить им возможность эффективно реализовать часы самостоятельной работы.

Весь лекционный материал курса сопровождается компьютерными презентациями, в которых наглядно преподносится материал различных разделов курса, что дает возможность обсудить материал с обучающимися во время чтения лекций, активировать их деятельность при освоении материала. Материалы лекций в виде слайдов находятся в свободном доступе в системе MOODLE и могут быть получены до чтения лекций и проработаны обучающимися в ходе самостоятельной работы.

На лекциях, лабораторных и практических занятиях реализуются интерактивные технологии, приветствуются вопросы и обсуждения, используется личностно-ориентированный подход, технология работы в малых группах, что позволяет обучающимся проявить себя, получить навыки самостоятельного изучения материала, выровнять уровень знаний в группе.

Все вопросы, возникшие при самостоятельной работе над домашним заданием, подробно разбираются на практических занятиях и лекциях. Проводятся индивидуальные и групповые консультации с использованием как встреч с обучающимися, так и современных информационных технологий (электронная почта, Zoom).

Иницируется активность обучающихся, поощряется задание любых вопросов по материалу, практикуется индивидуальный ответ на вопросы обучающегося, рекомендуются методы успешного самостоятельного усвоения материала в зависимости от уровня его базовой подготовки.

Для оценки знаний, умений, навыков и уровня сформированности компетенции применяется балльно-рейтинговая система контроля и оценки успеваемости обучающихся в процессе текущего контроля.

Промежуточная аттестация проводится в форме экзамена с учетом текущей успеваемости.

Результат обучения считается сформированным на повышенном уровне, если теоретическое содержание курса освоено полностью. При устных собеседованиях обучающийся исчерпывающе, последовательно, четко и логически излагает учебный материал; свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами заданий, использует в ответе дополнительный материал. Все предусмотренные рабочей учебной программой задания выполнены в соответствии с установленными требованиями, обучающийся способен анализировать полученные результаты, проявляет самостоятельность при выполнении заданий.

Результат обучения считается сформированным на пороговом уровне, если теоретическое содержание курса в основном освоено. При устных собеседованиях обучающийся последовательно излагает учебный материал; при затруднениях способен после наводящих вопросов продолжить обсуждение, справляется с задачами, вопросами и другими видами заданий, требующих применения знаний; все предусмотренные рабочей учебной программой задания выполнены в соответствии с установленными требованиями, обучающийся способен анализировать полученные результаты; проявляет самостоятельность при выполнении заданий

Результат обучения считается несформированным, если обучающийся при выполнении заданий не демонстрирует знаний учебного материала, допускает ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет задания, не демонстрирует необходимых умений, качество выполненных заданий не соответствует установленным требованиям, качество их выполнения оценено числом баллов ниже трех по оценочной системе, что соответствует до пороговому уровню.

10.2. Методические указания для занятий лекционного типа

Лекционный курс предполагает систематизированное изложение основных вопросов тематического плана. В ходе лекционных занятий раскрываются базовые вопросы в рамках каждой темы дисциплины (таблица 4). Обозначаются ключевые аспекты тем, а также делаются акценты на наиболее сложные и важные положения изучаемого материала. Материалы лекций являются опорной основой для подготовки обучающихся к практическим занятиям и выполнения заданий самостоятельной работы, а также к мероприятиям текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

10.3. Методические указания по освоению дисциплины на практических занятиях

Подготовку к каждому практическому занятию обучающийся должен начать с ознакомления с рекомендуемой литературой (таблица 4), которая отражает содержание предложенной темы. Каждая самостоятельно выполненная работа по индивидуальному варианту подлежит проверке преподавателем.

10.4. Методические указания по освоению дисциплины на лабораторных работах

При оценивании лабораторных работ учитывается следующее:

- качество выполнения расчетов и степень соответствия результатов работы заданным требованиям;
- целесообразность использования изученных методов;
- качество комментариев к решению.

10.5. Методические указания по самостоятельной работе обучающихся

Самостоятельная работа обеспечивает подготовку обучающихся к аудиторным занятиям и мероприятиям текущего контроля и промежуточной аттестации по изучаемой дисциплине. Результаты этой подготовки проявляются в активности обучающихся на занятиях и в качестве выполненных заданий для самостоятельной работы и других форм текущего контроля.

При выполнении заданий для самостоятельной работы рекомендуется проработка материалов лекций по каждой пройденной теме, а также изучение рекомендуемой литературы, представленной в Разделе 6.

В процессе самостоятельной работы при изучении дисциплины обучающиеся могут работать на компьютере в специализированных аудиториях для самостоятельной работы (таблица 12). В аудиториях имеется доступ через информационно-

телекоммуникационную сеть «Интернет» к электронной информационно-образовательной среде университета (ЭИОС) и электронной библиотечной системе (ЭБС), где в электронном виде располагаются учебные и учебно-методические материалы, которые могут быть использованы для самостоятельной работы при изучении дисциплины.

11 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

11.1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта в ходе текущего контроля успеваемости

Для текущего контроля знаний обучающихся по дисциплине проводится **комплексная оценка знаний**, включающая

- проведение контрольных работ;
- выполнение заданий для самостоятельной работы;

1.1.1. Типовые задания для контрольных работ

Контрольная работа № 1

Определить тип уравнения второго порядка и привести его к каноническому виду

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u = 0$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$
5. $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} + 4u = 0$

Контрольная работа № 2

1. Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 5, t > 0,$$

удовлетворяющее граничным и начальным условиям

$$u(0, t) = u(5, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 3, \\ 3(5 - x), & 3 < x \leq 5, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

2. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2, t > 0,$$

удовлетворяющее граничным и начальным условиям

$$u(0, t) = u(2, t) = 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ (2-x), & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

3. Найти решение уравнения теплопроводности,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, t > 0,$$

удовлетворяющее начальным и граничным условиям

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ (4-x), & 2 < x \leq 4, \end{cases}$$

4. Найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 7, t > 0,$$

удовлетворяющее начальным и граничным условиям

$$u(x,0) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 3, \\ 3(7-x), & 3 < x \leq 7, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

11.1.2 Типовые задания для лабораторных работ обучающихся очной формы

Лабораторная работа №1

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u = 0$$

$$2. 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0$$

Лабораторная работа №2

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 5, t > 0,$$

$$u(0,t) = u(5,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 3, \\ 3(5-x), & 3 < x \leq 5, \end{cases}$$

Лабораторная работа №3

Найти решение уравнения теплопроводности,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 8, t > 0,$$

$$u(0,t) = u(8,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0,25x^2, & 0 \leq x \leq 4, \\ (8-x), & 4 < x \leq 8, \end{cases}$$

Лабораторная работа №4

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полярной системе координат методом разделения переменных

$$\Delta u = 0, \quad 0 < r < 4,$$

$$u(4, \varphi) = -\varphi^2 + 3\varphi.$$

11.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта в ходе промежуточной аттестации по дисциплине

11.2.1. Типовые практические задания к экзамену:

1. Привести к каноническому виду и решить уравнение

$$3x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 5xy \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + 2y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 3x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

2. Определить тип уравнения второго порядка и привести его к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0$$

3. Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 5, t > 0,$$

удовлетворяющее граничным и начальным условиям

$$u(0, t) = u(5, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 3, \\ 3(5-x), & 3 < x \leq 5, \end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2, t > 0,$$

удовлетворяющее граничным и начальным условиям

$$u(0, t) = u(2, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ (2-x), & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

5. Найти общее решение уравнения $u(x, y), (x, y) \in R^2$.

а) $4xu_{xy} - 3u_y = 0$;

б) $u_{xy} - 2xu_y = 0$.

в) $2yu_{xy} - u_y = 0$;

6. Найти общее решение уравнения $u(x, y)$, приведя его к каноническому виду:

а) $u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$;

б) $u_{xx} - u_{xy} + 2u_{yy} = 0$;

7. Найти характеристики уравнения, $(x, y) \in R^2$.

а) $3x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} - y^2 u_{yy} = y u_x$;

б) $xu_{xx} - xu_{yy} + yu_x = 0$;

в) $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$;

8. Решение уравнения гиперболического типа в \mathbb{R}^2

$$8.1. \begin{cases} 9u_t = \Delta u, \\ u|_{t=0} = (xy)^2; \end{cases}$$

$$8.2. \begin{cases} u_{xy} = 0 \\ u|_{x=y} = 2y, \\ u_x|_{x=y} = 1; \end{cases}$$

9. Решить следующие задачи для (x,t) в \mathbb{R}^2 ($t > 0$):

$$9.1. \begin{cases} 9u_t = \Delta u, \\ u|_{t=0} = (xy)^2; \end{cases}$$

$$9.2. \begin{cases} u_t = 4\Delta u, \\ u|_{t=0} = \sin x + \sin y; \end{cases}$$